Maestro y Sociedad
Revista Electrónica para Maestros y profesores
Recibido: noviembre 2017 /Aceptado: enero 2018

Pautas para implementar la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas

Guidelines to implement the teaching of Mathematics through the problem solving

Dra. C. Isabel Alonso-Berenguer, ialonso@uo.edu.cu;
Dr. C. Alexander Gorina-Sánchez, gorina@uo.edu.cu;
MSc. Nilda Iglesias-Domecq, nilda@uo.edu.cu;
MSc. Juan Álvarez-Esteven, jalvarez@uo.edu.cu

Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba

Resumen
La Matemática desde épocas remotas ha permanecido contribuyendo al progreso de la cultura humana a la vez que atesorando y traspasando todo el conocimiento matemático acumulado. Su importancia radica en la gran utilidad que tiene para la vida práctica y la formación de habilidades cognitivas. Sin embargo, transmitir adecuadamente el caudal cultural de esta ciencia es un trabajo complejo, que requiere del empeño constante de la comunidad matemática. Una de las vías que actualmente se emplea para llevar a cabo esta tarea es su enseñanza a través de la resolución de problemas. Precisamente, en el presente trabajo se destaca la importancia de esta vía y se proponen algunas pautas para implementarla.

Palabras clave: matemática, enseñanza-aprendizaje, resolución de problemas, estrategias heurísticas, estrategias metacognitivas.

Abstract
Mathematics since ancient times has remained contributing to the progress of human culture while treasuring and transferring all the accumulated mathematical knowledge. Its importance lies in the great utility it has for practical life and the formation of cognitive skills. However, adequately transmitting the cultural wealth of this science is a complex work, which requires the constant commitment of the mathematical community. One of the ways that is currently used, to carry out this task, is its teaching through problem solving. Precisely, in the present work, the importance of this path is highlighted and some guidelines are proposed to implement it.

Key words: mathematics, teaching-learning, problem solving, heuristic strategies, metacognitive strategies.

Introducción

Enseñar adecuadamente el caudal cultural acumulado por la Matemática es un trabajo complejo que generalmente tropieza con la contradicción que se manifiesta entre la necesidad de su aprendizaje, que involucra a millones de personas, y la falta de consenso en cuanto a qué y cómo debe enseñarse dicha ciencia en cada nivel educacional. Las posibles soluciones a esta contradicción han generado gran cantidad de vías o enfoques didácticos, dentro de los que se destaca el de la *resolución de problemas*, el cual ha cobrado gran auge en las últimas décadas.

La importancia de este enfoque ha sido resaltada por numerosos educadores e investigadores en Didáctica de la Matemática, entre los que se destacan Polya (1957), Hayes (1981), Kilpatrick, (1985), Shoenfeld (1992), Labarrere (1994), Santos (1996), Álvarez, Alonso y Gorina (2012), Gorina y Domínguez (2012) y Álvarez, Alonso y Salgado (2016), los que se han aportado significativas ideas para su desarrollo, quedando demostradas las ventajas de su empleo en la enseñanza de la Matemática.

De manera particular, el famoso matemático Paul Halmos escribió en 1980 un célebre artículo titulado «The Heart of Mathematics» (El Corazón de la Matemática) en el cual resalta, precisamente, el papel de los problemas en el desarrollo de la matemática; éstos son su corazón (Beyer, 1998). Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos e ideas para el desarrollo de herramientas; en una palabra, la vida propia de la Matemática.

Asimismo, el NCTM (1980, 2000) ha destacado la importancia de considerar la resolución de problemas como el eje central de las matemáticas escolares y ha promovido investigaciones concernientes a su enseñanza-aprendizaje. En sus Estándares Curriculares se ha considerado la resolución de problemas como actividad fundamental a desarrollar por los estudiantes de manera individual y colectiva, para lograr un aprendizaje significativo, el que involucra la búsqueda de conexiones, el empleo de distintas representaciones, la necesidad de justificar los caminos seguidos durante la solución de un problema y la comunicación de los resultados.

Toda esta importancia aceptada justifica la necesidad de llevar a la práctica este enfoque didáctico de enseñar la Matemática, para lo cual debe profundizarse en las principales tendencias que han predominado hasta el momento en la resolución de problemas. Al respecto se destacan tres tendencias fundamentales: la resolución de un problema para justificar la necesidad de estudiar un determinado contenido, la resolución de problemas que ejemplifiquen la aplicación de contenidos que han sido explicados de forma abstracta y la resolución de problemas a través de todos los temas y clases, de manera que los estudiantes tengan la oportunidad de apropiarse de patrones de resolución, construir conjeturas y exponer y defender sus ideas, entre otras actividades (Shoenfeld, 1992).

Justamente esta última tendencia es la que se ha asumido en la presente investigación para llevar a cabo la enseñanza de la Matemática, la que se constituye en uno de las vías didácticas idóneas para lograr un aprendizaje activo y significativo, ya que pone el énfasis en los procesos de pensamiento y aprendizaje, tomando los contenidos matemáticos como recursos para construir formas de pensamiento eficaces.

Esta vía didáctica parte de considerar la necesidad de que el estudiante, ante un problema, movilice su capacidad mental para recuperar los conocimientos que posee, opere con los objetos presentes en dicho problema, desarrolle analogías con problemas ya resueltos, ejercite su creatividad, reflexione acerca de su proceso de pensamiento a fin de mejorarlo, haga transferencias de las actividades realizadas a otros aspectos de su trabajo mental, adquiera confianza y seguridad en sí mismo, se recree con su propia actividad mental y se prepare para otros problemas (Alonso, 2003; Álvarez, Alonso y Gorina, 2012; Gorina y Domínguez, 2012; Cabrales, Silva y Domínguez, 2016).

A partir de la importancia y de las ventajas que representa el empleo de la resolución de problemas para activar en los estudiantes el aprendizaje de la Matemática, se hace necesario implementar vías didácticas para su concreción a la práctica docente. En esta dirección, el presente trabajo propone algunas pautas para materializar esta intención.

Desarrollo

Se considera que algunas de las pautas más útiles para implementación de la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas son: la introducción de la perspectiva socio-constructivista, la instrucción sobre los problemas matemáticos y el proceder para su análisis, la explicación del modelo general de resolución de problemas, el trabajo con las estrategias heurísticas y la formación de estrategias metacognitivas.

Introducción de la perspectiva socio-constructivista

Esta perspectiva postula que cuando se aprende, no sólo la actividad cognitiva es importante, sino que también lo es la interacción con otras personas, factor que ayuda a acelerar el aprendizaje. Este postulado puede resultar de gran importancia si se aplica en el aula a partir de:

- El trabajo en grupos pequeños para la discusión de los problemas, de manera que se vayan creando patrones de análisis y solución de los mismos. Esto permite a los estudiantes confrontar puntos de vista contrarios, apropiarse de la forma en que sus compañeros analizan y resuelven los problemas, facilitándoles la elaboración de nuevas soluciones y cambios en sus representaciones, todo lo cual conllevará a la modificación positiva de sus patrones de análisis y solución de los problemas. Este método de desarrollar la dinámica de la clase debe combinarse con el trabajo independiente, siempre bajo la correcta orientación del profesor.
- El método de elaboración conjunta, mediante el cual el profesor puede desarrollar la solución de problemas en el aula, con la participación de sus estudiantes, guiándolos con preguntas que sirvan de impulsos cognitivos.

Instrucción sobre los problemas matemáticos y el proceder para su análisis

Para enseñar a analizar un problema es conveniente partir explicando qué es un problema matemático, definición que en la generalidad de los casos los estudiantes han incorporado intuitivamente, pero que no siempre tienen una representación correcta de su significado y en ocasiones es frecuente comprobar que confunden algunos de sus elementos. Esto es producto, casi siempre, de que no han tenido una asignatura responsabilizada con la discusión de estos aspectos generales, tan importantes para facilitar el camino de la resolución de los problemas.

Es así que, cuando el docente se enfrenta a la tarea de seleccionar una definición de problema matemático para trabajar con sus estudiantes, se encuentra con que existe un elevado número de estas, pero no todas facilitan dicho trabajo, porque muchas resaltan aspectos psicológicos y/o de la estructura externa del problema, por lo que deberá buscar alguna que explicite el tipo de información que brinda este problema, para que oriente al estudiante en su abordaje y solución. De manera particular, será conveniente emplear una definición que enuncie los elementos que componen el problema matemático y sus componentes, así como el tipo de dificultad que contiene y la necesidad de operar para darle solución.

Una definición con esas características, recomendable para orientar al estudiante, es la que plantea que un problema matemático es una situación que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias contentivas de una dificultad intelectual, que origine en el resolutor la necesidad de darle respuesta, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias (Alonso, 2001). Como premisas para el establecimiento de esta definición, deberá explicarse al estudiante que:

- Para que una situación matemática represente un problema para un individuo o grupo de individuos, ésta debe contener una dificultad intelectual y no sólo operacional o algorítmica. Además debe suceder que la persona, de manera consciente, reconozca la presencia de la dificultad y la situación pase a ser objeto de interés para la misma, o sea, que exista una disposición para resolver dicha dificultad.
- La base de conocimientos requerida puede estar compuesta inicialmente por conocimientos y experiencias que se han adquirido y acumulado previamente o puede ser ampliada al abordar el problema, mediante consulta de textos o de personas capacitadas.
- En todo problema aparece al menos un objeto que puede ser matemático como por ejemplo un triángulo, un número, una ecuación, etc., o puede ser un objeto real como, un camino que enlace dos puntos, un río, un poste, etc. También puede que aparezcan objetos de ambos tipos, de todas formas los objetos reales en el proceso de resolución del problema hay que representarlos matemáticamente para poder aplicar los métodos de esta ciencia.
- Junto a los objetos, en cada problema suele aparecer una serie de características de los mismos, algunas de carácter cuantitativo como longitudes, volúmenes, número de vértices, aristas, etc. y otras cualitativas como el tipo de triángulo (equilátero, isósceles, escaleno o rectángulo), el tipo de camino (recto, curvo, poligonal), etc. También pueden aparecer relaciones entre los objetos, tales como relaciones de distancia, tangencia, semejanza, equivalencia, congruencia, etc.
- Las condiciones del problema son conformadas por algunos objetos, características de estos y relaciones entre los mismos, que son dadas en la formulación del problema. La exigencia o interrogante a la cual hay que dar respuesta también se expresa en términos de objetos, características o relaciones.

- Si la dificultad que presenta la situación matemática es sólo algorítmica, es decir, si el conocimiento previo incluye un programa bien preciso para su solución, no se considera problema, sino ejercicio. De aquí el carácter relativo de los problemas, es decir, que lo que representa un problema para un estudiante puede ser un ejercicio para otro que ya conozca una vía de solución.

Una vez que han sido preparados los estudiantes desde el punto de vista teórico, entonces para que aprendan a analizar los problemas será necesario insistir en que: lean varias veces el enunciado del problema para interpretarlo y establecer de manera precisa las condiciones y exigencias del mismo, descompongan las condiciones y las exigencias en sus elementos (objetos, características y relaciones) y finalmente que integren dichos elementos en una representación inicial del problema. Un ejemplo de la forma en que el profesor puede realizar la orientación para el análisis de los problemas se muestra a continuación:

El profesor propone: Dado el siguiente problema matemático, determine sus componentes y elementos: Las raíces de la ecuación $x^2+ax+b+1=0$ son números naturales. Demuestre que a^2+b^2 es un número compuesto (Tomado de Alonso y González, 2003).

Por medio del trabajo en grupos pequeños o empleando el método de elaboración conjunta, el profesor debe hacer que sus estudiantes realicen un análisis que los lleve a concluir lo siguiente:

Condiciones:

1. $x^2+ax+b+1=0$ es una ecuación.
2. x_1 y x_2 son raíces de esa ecuación.
3. Las raíces x_1 y x_2 son números naturales.
4. Los números a y b son parámetros que aparecen en los coeficientes de la ecuación.

Exigencia: Demostrar que a^2+b^2 es un número compuesto.

Representación inicial del problema: $a^2+b^2=M \cdot N$, donde M y N son números naturales diferentes de la unidad.

Explicación del modelo general de resolución de problemas

Es conveniente dar a conocer a los estudiantes que este modelo fue creado por el matemático y didacta húngaro Polya (1954) y consta de cuatro fases o etapas esenciales para la resolución de un problema, las que por su grado de generalidad no llevan directamente a la solución de los problemas, pero orientan el camino a seguir para lograrlo. Las citadas etapas son: comprensión del problema, búsqueda de una vía de solución, ejecución de la vía concebida y análisis de la solución encontrada y del proceso desarrollado para llegar a ella.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de los problemas matemáticos debe comenzar facilitando que los estudiantes entiendan la importancia de llevar a cabo la primera etapa del modelo general, la *comprensión del problema*, para ello debe trabajarse propiciando que estos se formen una representación inicial del mismo.

La representación inicial del problema, como se ha dicho, contempla la representación mental de los objetos que intervienen en el problema, de las características y relaciones que son dadas como condiciones y también de aquellas que constituyen las exigencias del problema; todo esto en el marco de los conocimientos y experiencias adquiridos previamente y, además, la manifestación externa de dicha representación mental, a través de la expresión oral, de símbolos escritos, de dibujos, de tablas, etc. Esta representación inicial conlleva a una primera comprensión del problema, que será tan buena como cercana a la esencia del mismo esté la citada representación.

También debe instruirse a los estudiantes en cuanto a *las vías de solución*, explicándoles que estas son programas que establecen una estrategia a seguir para lograr la solución. Así, por ejemplo, si el problema que se aborda es un problema de aplicación, lo primero que debe hacerse es formularlo en el lenguaje matemático, es decir, representar todos los elementos de la realidad que en este aparecen mediante objetos matemáticos. Este proceso recibe el nombre de modelación matemática del problema real.

Una vez que se ha concebido una vía para la solución del problema que se aborda, ésta debe ser instrumentada, es decir, deben ser ejecutadas cada una de las operaciones previstas en la estrategia trazada. La ejecución de las operaciones consta de la fundamentación de cada uno de los pasos que se desprenden de la estrategia y de la realización de los cálculos previstos por ésta. Generalmente la *ejecución de la vía* conduce a una posible solución del problema, la cual debe ser *comprobada* antes de admitirla, es decir, debe verificarse si la misma realmente satisface todas las exigencias del problema, luego de lo cual debe formularse la respuesta.

Por último, deben conocer que cuando se ha dado solución al problema es provechoso reflexionar sobre el proceso seguido, con el objetivo de sintetizar y fijar en la memoria los aspectos esenciales, así como averiguar sobre la posible existencia de alguna otra estrategia de solución más racional. También es recomendable investigar una posible generalización del problema y las consecuencias que pueden extraerse de la solución obtenida.

Un ejemplo de cómo llevar a la práctica la explicación del modelo general de resolución de problemas, creado por Polya, es la que se muestra a continuación, mediante la solución de un problema, empleando el método de elaboración conjunta en el aula.

El profesor propone el problema: Dos postes de teléfono de 10 m y 25 m de altura respectivamente se colocarán a una distancia de 40 m. Los postes deben ser sujetados a un punto de apoyo situado entre ambos. ¿Cuál debe ser el lugar para situar el punto de apoyo si se desea que la suma de las longitudes del cable de cada poste al punto de apoyo sea mínima? (Alonso y González, 2003).

Luego induce la etapa de *comprensión del problema* para que el estudiante llegue a que, según el enunciado, son objetos dados los postes y el cable. Además, se dan las longitudes de estos, la distancia entre ellos y la relación referida a que el cable debe sujetarlos a un punto de apoyo situado entre ambos. Se pide determinar la situación del punto de apoyo tal que la longitud total del cable sea mínima (Fig. 1).

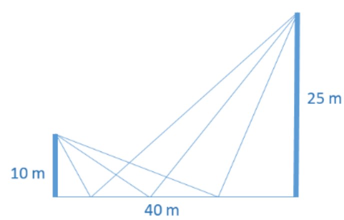

Fig. 1 Primera representación del problema

Hará notar, mediante preguntas, que este problema involucra objetos reales y para su comprensión será necesario apelar a los conocimientos y experiencias no sólo matemáticos, sino también del mundo que nos rodea. Llevará a sus estudiantes a imaginar los postes situados verticalmente con su base descansando en un terreno plano y el punto de apoyo sobre el segmento de línea recta que une las bases de estos. Además, que la sujeción de los postes mediante el cable pudiera concebirse de distintas maneras y, mediante preguntas, llegar a que la más sencilla es aquella que considera que el cable parte del extremo superior de un poste, toca el punto de apoyo y termina en el extremo superior del otro, de forma que pueda representarse como la unión de dos segmentos rectilíneos.

Esta primera representación del problema se puede ilustrar como en la Figura 1, en la cual se han considerado varios posibles puntos de apoyo con los correspondientes segmentos de cable que sujeta a los postes.

Posteriormente se deberá llegar a que ahora el problema consiste en localizar aquel punto de apoyo para el cual la longitud del cable requerida sea mínima, y que esta localización puede darse en términos de la distancia del punto de apoyo a la base de uno de los postes.

Para explicar cómo buscar una *vía de solución* los estudiantes deben llegar a plantear que la representación inicial del problema permite formularlo en términos matemáticos del siguiente modo: dados dos puntos del plano (correspondientes a los extremos superiores de los postes) y una recta que no separa estos puntos (aquella que une las bases de los postes) encontrar el camino más corto de un punto al otro y que pasa por la recta dada.

Aquí es conveniente preguntar a los estudiantes si no conocen un problema análogo a éste, llegando a que el mismo es: dados dos puntos, buscar el camino más corto que los une. Se sabe que ese camino es precisamente el segmento de línea recta que une estos puntos. Es probable que los estudiantes se percaten de que al problema original no se le puede aplicar directamente este resultado, pues como ambos puntos están a un mismo lado de la recta, el camino recto que los une no pasa por la recta. En ese momento será preciso preguntar si será salvable esta dificultad.

Una vez escuchadas todas las sugerencias, se podrá concluir que la idea es trasformar el problema original en otro donde la dificultad mencionada se resuelva, y tal que su solución implique la solución del problema original. Por ejemplo, sustituyendo uno de los puntos por su proyección respecto a la recta y considerando el problema análogo al original y que sólo se diferencia de aquel en la sustitución mencionada. La representación externa de estos razonamientos se puede expresar mediante un gráfico como el de la Figura 2, donde se han trazado tres posibles caminos del problema transformado.

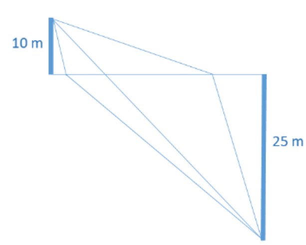

Fig. 2. Representación de tres posibles caminos del problema transformado.

El profesor hará observar que para el nuevo problema, entre los caminos que unen los dos puntos se encuentra el camino recto y éste es precisamente el camino más corto. Así el problema transformado ha podido ser resuelto. En este momento podrá preguntar si ayudará esto a la solución del problema original. Y no será difícil que los estudiantes observen que sí, ya que existe una correspondencia biunívoca entre los caminos de un problema y del otro, de manera que los caminos correspondientes tienen la misma longitud. Esto lo podrá ilustrar como en la Figura 3, que muestra un camino del problema original y el correspondiente a este del problema transformado.

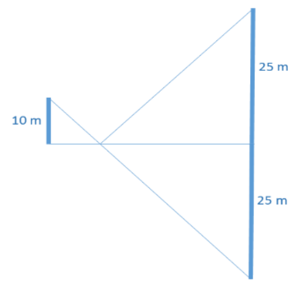

Fig. 3 Equivalencia entre el camino del problema original y del problema transformado

Las reflexiones realizadas permitirán fundamentar una vía de solución para el problema, que se basa en la Figura 4 y que consiste en determinar el lado $\overline{DX}$ del triángulo ADX haciendo uso de la semejanza de este triángulo con el triángulo XCE.

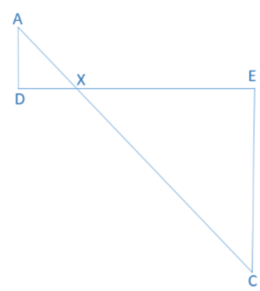

Figura 4. Camino más corto para el problema transformado

Para la ejecución de la vía de solución, el profesor debe hacer notar que esta consiste en hallar la longitud del segmento $\overline{DX}$. Que los triángulos ADX y XCE son rectángulos y tienen iguales sus ángulos DXA y CXE, luego según uno de los criterios de semejanza de triángulos ADX y XCE son semejantes entre sí. Teniendo en cuenta que los lados que se oponen a ángulos iguales de triángulos semejantes son proporcionales, se obtiene la igualdad:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{DX}}{\overline{XE}} \qquad (1)$$

Y por otra parte, según condición del problema: $\overline{DX} + \overline{XE} = 40$ (2)

Si ahora se despeja $\overline{XE}$ en la expresión (2) y se sustituye en (1) se obtiene, para la magnitud buscada, la ecuación: $\frac{10}{25}=\frac{\overline{DX}}{40-\overline{DX}}$, la cual puede ser resuelta sin dificultad, obteniéndose la solución: $\overline{DX}=\frac{80}{7}$.

A partir de este resultado, el profesor debe inducir que formulen la respuesta del problema: el punto de apoyo debe ser situado sobre el segmento que une las bases de los postes, a una distancia de 80/7 metros del poste de 10 metros.

Para desarrollar el análisis de la solución, el profesor deberá destacar que esta se dio en términos de la distancia del punto de apoyo al poste más pequeño, pero podía haberse dado en términos del otro poste. Esta solución también puede expresarse haciendo uso del sistema decimal: el punto de apoyo debe ser situado sobre el segmento que une las bases de los postes, a una distancia de 11.428 metros del poste de 10 metros.

Debe hacer observar que de la propia solución se infiere que la ubicación del punto de apoyo que minimiza la longitud del cable es única. Además, que este problema de aplicación se formuló en términos de un problema matemático y luego se resolvió transformándolo en un problema equivalente más fácil de resolver. También será interesante que fijen que la idea de la vía de solución la proporcionó el conocimiento de que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta que los une.

Debe dar a conocer que otra vía para resolver este problema, sin necesidad de transformarlo, es determinar la expresión de la longitud total del cable en función de la localización del punto de apoyo, de donde se obtiene una función real de una variable y para buscar el punto donde esta función alcanza su mínimo pueden ser aplicadas las técnicas del Cálculo Diferencial.

Dar a conocer que, si bien esta última vía representa un método muy útil para la resolución de problemas prácticos, para este problema particular no resulta la vía más corta por la complejidad de las expresiones que aparecen al ejecutarla. Es decir, que la vía geométrica en este caso resulta de una aplicación más simple que la vía analítica.

Trabajo con estrategias heurísticas

Las estrategias heurísticas son reglas y técnicas que se pueden emplear para progresar en la solución de los problemas matemáticos cuando se está desorientado. Algunas de las que el profesor debe ensayar con sus estudiantes en el aula son:

- Elaboración de un gráfico siempre que sea posible. Es una estrategia sencilla pero muy útil porque permite visualizar relaciones entre los objetos matemáticos que pueden haberse pasado por alto durante el análisis.
- Uso de analogías con problemas ya resueltos. En la actividad matemática con frecuencia surgen analogías con problemas cuyos enunciados son diferentes, pero que presentan soluciones con ciertos rasgos comunes. Este hecho se presenta tan a menudo que una estrategia a tener siempre en cuenta al enfrentar un problema nuevo es buscar en la memoria posibles analogías con problemas que se hayan resuelto, de manera que se pueda trasladar la técnica empleada a la nueva situación.
- División del problema en sub-problemas. Estos son problemas más sencillos o ejercicios, en términos de algunos elementos del problema original, los que pueden ser resueltos de manera más o menos directa, usando el conocimiento previo y son tales que de ellos se infiere la solución del problema original.
- Reformulación del problema. Es una transformación del problema original, de manera que entre los elementos de ambos exista una correspondencia que permita, una vez resuelto el problema auxiliar, dar también solución al problema original. Esta operación resulta efectiva si conduce a un problema que ya se sabe resolver o cuya solución es más fácil de encontrar
- Consideración de casos particulares. En muchas ocasiones en que no se tiene idea de cómo abordar la resolución de un problema, resulta muy provechoso el considerar casos particulares o casos más simples del problema planteado, lo que puede ayudar a encontrar la vía de solución.
- Consideración de un caso general. Al abordar un problema, en ocasiones se facilita reflexionar sobre un caso general, es decir, un problema que representa una generalización del problema que se está resolviendo. Si se logra hallar la solución del problema general, entonces por esta vía se obtiene también la solución del problema particular.
- Consideración de todos los casos posibles. En algunos problemas, de manera natural, se presenta una variedad de casos posibles, y la no posibilidad de abordarlos de una manera integrada, lleva a la estrategia de considerar por

separado cada uno de los casos y luego reunir los resultados parciales obtenidos para dar la solución al problema original.

- Trabajo hacia atrás. En muchos problemas es aconsejable tomar como punto de partida la exigencia y establecer determinadas condiciones (antecedentes), de las cuales ésta se deduce. Si estos antecedentes, a su vez se deducen de las condiciones del problema, entonces ya de aquí se obtiene la solución del problema. En la práctica es frecuente que la solución del problema se alcance a través de una cadena de razonamientos de este tipo.

Formación de estrategias metacognitivas

Hasta aquí se han tratado aspectos del proceso de resolución de problemas que deben ser atendidos por los profesores durante el proceso formativo, tales como:

- La importancia de tener conocimientos precisos y bien organizados, que sirvan de base para fundamentar cada paso que se dé en el proceso de resolución.
- La necesidad de adquirir una experiencia de resolución de problemas matemáticos que permita identificar cuándo estamos en presencia de uno de ellos, qué se puede considerar su solución y las operaciones que deben realizar para resolverlo.
- El papel de la representación en el proceso de resolución de los problemas matemáticos.
- La utilidad de las estrategias heurísticas y, en particular, de las etapas de resolución de los problemas matemáticos.

Sin embargo, estos no son los únicos aspectos importantes, a tener en cuenta en la formación sobre la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas. Existen otros, asociados a la metacognición, que contribuyen al éxito, estos son los siguientes:

- Ser capaz de seguir lo que se va haciendo, irse observando uno mismo e ir pensando en las acciones que va desarrollando, con el fin de tomar decisiones apropiadas ante cualquier dificultad que se presente durante el proceso de resolución.
- Tener ideas correctas sobre la Matemática, sobre su utilidad y sobre la capacidad propia para comprenderla y resolver problemas.

El primer aspecto planteado se refiere a lo que se llama control o autocontrol del proceso de resolución de problemas, mientras que el segundo conforma lo que se llama sistemas de creencias sobre la Matemática. Ambos aspectos son componentes de la metacognición, la que se entiende como el conocimiento que la persona tiene sobre su pensamiento y la forma en que este opera (Alonso y González, 2003). Es importante que el estudiante comprenda que la metacognición juega un papel relevante en cada una de las etapas del proceso, ya que es vital para que se haga un uso adecuado y efectivo de la información que se posee al resolver un problema.

Enseñar al estudiante a auto-monitorearse, es decir, a seguir lo que van haciendo, a irse observando a sí mismo y pensando en las acciones que va desarrollando, con el fin de tomar decisiones apropiadas ante cualquier dificultad que se presente durante el proceso de resolución, es el camino hacia el éxito en el proceso formativo. Esto puede llevarse a la clase siguiendo las siguientes recomendaciones:

- Contrarrestar el hábito de comenzar a trabajar con la primera información que recuerdan.
- Entrenarlos para que hagan un buen análisis que les permita comprender el problema, insistiendo en que no comiencen a trabajar en la solución antes de su completa comprensión.
- Corregir el hecho de que pasen mucho tiempo haciendo cálculos improductivos sin darse cuenta de ello.
- Enseñarlos a detener las acciones exploratorias y reanalizar el problema en aquellos casos en los que, estando ya explorando la vía de solución, se detecte que todavía algún elemento no se ha tenido en cuenta o no se ha comprendido correcta o completamente el problema.
- Que aprendan que antes de ejecutar operaciones engorrosas o extensas, deben valorar las potencialidades de estas como eslabones esenciales en la solución del problema. Es preferible tratar de concebir los aspectos generales de la estrategia y sólo luego pasar a su ejecución.
- Que vean que aun cuando se conciba una estrategia de solución y se llegue a tener cierta confianza en su efectividad, puede suceder que al ejecutarla no conduzca a la solución del problema, por lo que deberán re-explorarlo, utilizando toda la experiencia acumulada y buscar nuevas estrategias de resolución.

- Que formen el hábito de, luego de obtenida la solución del problema, realizar el análisis de la misma y del proceso que se llevó a cabo para obtenerla. Esto facilita el aprendizaje de la estrategia seguida y puede llevarlos a darse cuenta de otras vías de solución del problema.

En resumen, se ha podido evidenciar que la resolución de problemas matemáticos constituye una vía didáctica esencial para potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, mediante la cual los estudiantes tienen la posibilidad de apropiarse del conocimiento matemático desde una perspectiva creativa, motivadora, reflexiva, intuitiva, socio-constructivista y práctica.

Conclusiones

1. ***Es importante implementar la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas, para lo cual el profesor podrá emplear el trabajo en grupos pequeños combinado con el trabajo independiente, la discusión en clase del proceso de resolución y de las soluciones encontradas, la exposición oral de los resultados, entre otros métodos que contribuyan a activar la clase y potenciar el aprendizaje de los estudiantes.***
2. ***También es oportuno seleccionar previamente los problemas a emplear para lograr los objetivos de la clase y lograr un ambiente propicio para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, facilitando la motivación de los estudiantes a partir del estímulo sistemático de su esfuerzo, al propiciar el intercambio de ideas en un clima de respeto a todas las intervenciones, asumiendo la postura de moderador para regular el proceso sin sentir la necesidad de intervenir.***
3. ***Finalmente, es muy beneficioso introducir el empleo de estrategias heurísticas y metacognitivas, favoreciendo que los estudiantes se apropien de las mismas mediante su aplicación a una variada gama de problemas matemáticos, reforzando en ellos sus motivaciones, actitudes, hábitos, razonamientos e ideas matemáticas como base para que logren un pleno desarrollo en una sociedad cada vez más compleja y matematizada.***

Referencias bibliográficas

1. Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación*. (Tesis de Doctorado). Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba.
2. Alonso, I. (2003). Modelación didáctica de la representación y su formación en el proceso de resolución de problemas matemáticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (16), 530-536.
3. Alonso, I.; González, H. (2003). *¿Cómo tener éxito al resolver problemas matemáticos?* Bolivia: Visión Creativa, Equipo Consultor S.R.L.
4. Álvarez, J., Alonso, I.; Salgado, A. (2016). Resolución de problemas matemáticos en la licenciatura en educación matemática-física. *REFCalE: Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa*. 4(1), 67-82.
5. Álvarez, M., Alonso, I.; Gorina, A. (2012). Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (25), 625-634.
6. Beyer, W. O (2008). Algunas precisiones acerca de la resolución de problemas y de su implementación en el aula. *Paradigma*, 19(1), 39-55.
7. Cabrales, Y.; Silva, J. L.; Domínguez, A. (2016). Procedimiento didáctico para la resolución de problemas matemáticos. *Revista Boletín Redipe*, 5(4), 34-41.
8. Gorina, A.; Domínguez, S. (2012). La resolución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. En *Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática*, Nesterova, Ulloa, Pantoja (Coords.). Vol. 1. Colección Monografías de la Academia 2008-2009, (pp. 356-374). Universidad de Guadalajara, México: Editorial Universitaria.
9. Hayes, J. R. (1981). *The complete problem solver*. Philadelphia, Pensilvania, USA: The Franklin Institute Press SM.
10. Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E.A. Silver, *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, (pp. 1-16), Hillsdale, NJ: Erlbaum.
11. Labarrere, A. (1994). *Pensamiento. Análisis y autorregulación en la actividad cognoscitiva de los alumnos*. México: Angeles Editores.
12. NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action*. Reston, Va: NCTM.
13. NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.
14. Polya, G. (1954). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
15. Polya, G. (1957). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. 1 y 2). Princeton: Princeton University Press.
16. Santos, L. M. S. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. (s.l.e.): Grupo Editorial Iberoamérica.
17. Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In Grouws, D. (Ed.). (1992). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.