Título: Una aproximación al estudio de la Lógica Matemática

Autores: Dr. C. Profesor Titular Hugo Manuel Falcón Alén, adia@uo.edu.cu
MSc. Profesora Auxiliar Yolanda González Cosme
Profesora Asistente Licenciada Susana Duany Solán
Centro de procedencia: Universidad de Ciencias Pedagógicas "Frank País García".
Facultad de Educación Infantil

Recibido enero 2015 – aprobado marzo 2015

Resumen

Cuando los profesores imparten cursos de Matemática que incluyen contenidos de Lógica Matemática, le atribuyen sus orígenes a Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) sin embargo, pocas veces precisan que la Lógica de Aristóteles no es la Lógica Matemática que se estudia en la actualidad, ni explican si formaba parte o no de la Matemática en aquella época. En el presente artículo se recorre, en apretada síntesis, el camino que ha seguido la Lógica Matemática hasta la actualidad y su vínculo con la Matemática.

Palabras clave: Lógica Formal, Lógica Matemática, Concepto, Juicio, Razonamiento.

Title: An approximation to the study of Math logic

Authors: Dr. C. Titular Professor Hugo Manuel Falcón Alén
MSc. Auxiliary Professor Yolanda González Cosme
Licentiate .Assistant Professor Susana Duany Solán
Precedence: University of Pedagogical sciences "Frank País García". Faculty of Infant Education

Abstract

When professors teach courses of Mathematics that include contents of Mathematical Logic, they attribute their origins to Aristotle (384 A.C. 322 A.C.) however, they don't specify that Aristotle's Logic is not the Mathematical Logic that that is studied at present time, neither they explain if it was part or not of Mathematics in that time. In this article the authors present, in tight synthesis, the road that has followed the Mathematical Logic until the present time and their bond with the Mathematics.

Key words: Formal logic, Mathematical Logic, Concept, Trial, Reasoning.

Introducción

El estudio de la génesis de La Lógica Matemática debe realizarse a partir de los vínculos que se establecen entre la Lógica Formal, que estudia la Filosofía y la Matemática. Sin embargo, en la mayoría de los textos de Análisis Matemático que incluyen el estudio de la Lógica Matemática, no aparecen explicaciones sobre sus orígenes, dado que en esencia, parten directamente de los contenidos de esta para fundamentar teóricamente los siguientes capítulos del libro. Otras fuentes bibliográficas de Matemática e Historia de la Matemática, tampoco abordan el tema en cuestión.

Los elementos antes expuestos constituyen una limitación para el estudio del origen de la Lógica Matemática y el reconocimiento de su importancia para el desarrollo del pensamiento lógico, aspectos de vital importancia para los profesores que enseñan esta asignatura.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, el objetivo del presente artículo es esclarecer el origen e importancia de la Lógica Matemática.

Desarrollo

En la actualidad La Lógica Matemática es considerada una rama de la Matemática. Según el pequeño Larousse de Ciencia y Técnica, "La Matemática es la ciencia que trata de las cantidades calculables y sus propiedades" (De Galiana Mingot, 1968, pág. 664).
Otros autores plantean que la Matemática se erige en una ciencia de la cual no se puede, desde afuera, definir ni su fin ni sus métodos, sin embargo reconocen que las matemáticas son importantes no solamente en sí mismas, por su coherencia interna, sino, sobre todo, por su utilización recurrente en los campos más diversos (Warusfel, 1972, pág. 270).
A diferencia de los conceptos anteriores, Federico Engels definió:

> "Las matemáticas elementales, las que operan con **magnitudes constantes**, se mueven, al menos en términos generales, dentro de los marcos de **la lógica formal**; las matemáticas de las **magnitudes variables**, cuyo sector más importante es el cálculo infinitesimal, no son más que la **aplicación de la dialéctica** a los problemas matemáticos" (Engels, 1979, pág. 163). Se comparte este criterio al considerar que incluye aspectos esenciales del tema que se aborda.

Todas las ramas de la Matemática, por diferentes que parezcan, se hallan entremezcladas generalmente con la razón de su objeto. Este objeto lo constituyen, según definición de F. Engels, las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real (Ríbnikov, 1991, pág. 9).
En la historia de las matemáticas pueden distinguirse períodos aislados, diferenciados uno del otro por una serie de características particulares. La periodización es necesaria para poder orientarse en los hechos que marcan el desarrollo histórico de las matemáticas, en particular, en lo referido al surgimiento y desarrollo de las distintas ramas de esta ciencia y sobre todo, de los fundamentos teóricos que le sirven de sustento, como es el caso de la Lógica Matemática.
Se asume la periodización establecida por el célebre matemático Ruso A. N. Kolmogorov (Ríbnikov, 1991, pág. 16), quien distingue cuatro grandes períodos en el desarrollo de las matemáticas:

1. Nacimiento de las matemáticas, período que se prolonga hasta los siglos VI – V a.n.e. cuando las matemáticas se convierten en una ciencia independiente con un objeto y métodos propios. El comienzo de este período se remonta al momento en que el hombre pasó a utilizar instrumentos para la obtención de medios de subsistencia y posteriormente, al intercambio de los productos del trabajo y concluye con el surgimiento de formas, cualitativamente, nuevas del pensamiento matemático, esto es, cuando el conjunto de estos conceptos y métodos y su contenido se hicieron lo suficientemente ricos para constituir sistemas, lógicamente, relacionados, es decir; formas primarias de teorías matemáticas.
2. El período de las matemáticas elementales, que abarca desde los siglos VI – V a.n.e. hasta el siglo XVI n.e. En este período se obtienen logros en relación con el estudio de **las magnitudes constantes** señaladas por F. Engels, muchos de los cuales se estudian actualmente en la escuela media.
3. Período de formación de las matemáticas **de magnitudes variables**, que se extiende desde el siglo XVII hasta mediados del siglo XIX. Es a juicio de los autores, uno de los períodos más ricos en el desarrollo de muchas ciencias, en particular de la Matemática, donde se destacan los aportes de I. Newton y G. V. Leibniz; este último, con importantes resultados en diferentes ramas de las ciencias, entre los que se destaca su contribución a la "naciente" Lógica Matemática. Por su parte, Galileo dio la expresión matemática de las leyes de la caída de los cuerpos, Kepler describió y formuló matemáticamente sus famosas leyes del movimiento de los planetas, Newton pudo formular y demostrar convincentemente la ley de la gravitación universal. Aparecen organizaciones científicas tales como La Royal Society de Londres (1662) y

la Academia de París (1666), así como publicaciones periódicas que abordan temáticas científicas tales como el “Philosophical Transactions” en Londres (1665), el “Journal des Scavans” en París (1665) y la Revista “Acta Eruditorum” de Leipsig (1682) fundada por Leibniz.

Refiriéndose a este período, F. Engels dijo: “el punto de viraje de las matemáticas fue la variable de Descartes. Gracias a esto se introdujo en las matemáticas el movimiento y con él, la dialéctica, de lo cual surgió la inmediata necesidad del cálculo diferencial e integral, que comienza, inmediatamente a partir de ahora y que Newton y Leibniz en general, perfeccionaron, pero no inventaron” (Ríbnikov, 1991, pág. 154).

4. Período de las matemáticas contemporáneas, desde mediados del siglo XIX hasta la actualidad, cuyo aspecto más relevante lo constituye el establecimiento de los fundamentos de las matemáticas. Por fundamentos de las matemáticas se entiende el sistema de problemas y teorías históricas, lógicas y filosóficas de la misma. En particular, se trata de una reconsideración crítica del sistema de axiomas de la Matemática y de la totalidad de los métodos lógicos de demostraciones matemáticas (Ríbnikov, 1991, pág. 18), en los que juega un papel esencial el desarrollo que alcanza la Lógica Matemática.

“La filosofía surgió en la sociedad esclavista como ciencia que unifica todo el conjunto de conocimientos del hombre acerca del mundo objetivo y sobre sí mismo. En el curso del desarrollo de la práctica productiva y la acumulación de conocimientos científicos, algunas ciencias se van desprendiendo de la filosofía” (Rosental & Ludin, 1954, pág. 273), así ocurre con la Matemática al finalizar el primer período, durante los siglos VI – V a.n.e., sin embargo, se puede afirmar que a pesar de esta independencia de la matemática como ciencia, su vínculo con la filosofía se ha mantenido durante toda su historia.

Los avances alcanzados en las matemáticas a lo largo de su historia no son resultado de un proceso armonioso de desarrollo continuo y gradual de las verdades matemáticas; sino el resultado de una compleja lucha entre lo nuevo y lo viejo, que se revela particularmente fuerte, cuando lo nuevo irresistiblemente vence, como resultado del heroísmo de científicos de reconocido prestigio o de formación empírica, que desde los tiempos del Imperio Romano y la Edad Media, la hicieron avanzar a precio de sus propias vidas. El carácter y origen de las abstracciones matemáticas, sus particularidades, siempre han sido terreno de lucha entre el materialismo y el idealismo. Especial importancia tienen los problemas filosóficos relacionados con los fundamentos de las matemáticas (Formalismo e Intuicionismo) (Rosental & Ludin, 1954, pág. 273). Lo abstracto del objeto de las matemáticas en ocasiones se percibe como elemento inicial e independiente de su contenido, que conduce a diferentes formas de equívocos idealistas e influye negativamente en su desarrollo. La historia muestra que lo importante, lo determinante en el desarrollo de una ciencia tan abstracta como la Matemática, lo constituyen las exigencias de la realidad material.

Otra manifestación particular del vínculo entre la Filosofía y la Matemática es la Lógica Matemática, surgida en el siglo XIX como consecuencia del desarrollo alcanzado por la Matemática, la Lógica Formal y el intento de muchos científicos de dotar de sentido matemático a esta última.

El estudio del desarrollo histórico de la Lógica Matemática teniendo en cuenta lo anterior debe comenzar por el análisis de lo que se entiende por lógica.

En el uso común del lenguaje, frecuentemente, encontramos la frase “esto es lógico”, con lo cual se expresa que una afirmación es clara y consecuente y puede ser considerada como razonable. Por el contrario, cuando una asociación de ideas se nos manifiesta como algo sin sentido, o inconsecuente, la calificamos de ilógica.

Lógica (del griego Logos: idea, palabra, regularidad). Ciencia filosófica de las leyes y formas del pensamiento correcto.

El término lógica se usa en tres acepciones: (1) como ciencia de las reglas del raciocinio y las formas en que se realiza; (2) como conjunto de las reglas que acata el proceso de pensamiento que refleja la realidad; (3) estudio de las regularidades del mundo objetivo. La Lógica Formal como medio de cognición del mundo objetivo estudia el pensamiento abstracto, sus formas (conceptos, juicios y razonamientos) y leyes que reflejan el mundo en el proceso de pensamiento (Leyes lógicas: Ley de identidad, Ley de no contradicción, Ley del tercero excluido, Ley de la razón suficiente)" (Guétmanova A., 1991, pág. 178).

La Lógica es una disciplina filosófica (Kopnin, 1983, pág. 23); como ciencia, existe desde hace más de 2000 años. Se registran indicios de que ya en el siglo V a.n.e. los chinos, los hindúes y los hebreos se ocuparon de las cuestiones de la lógica, y en la antigua Grecia, Xenón, Sócrates y Platón hicieron grandes aportes a esta ciencia. Sin embargo, se considera su creador al filósofo griego Aristóteles (384 – 322 a.n.e.) quien cumplió sistemáticamente los conceptos, sus relaciones mutuas, los juicios y conclusiones deducibles y creó, con los silogismos, una clara estructura formal.

Es así que la primera fase en la evolución de la ciencia Lógica fue la llamada Lógica Formal tradicional, creada por primera vez como ciencia por Aristóteles (Andréiev, 1984, pág. 35). En lo sucesivo esta fue avanzando, se completó con nuevas reglas y formas del pensamiento, pero, en su base, se mantuvo tal y como la creara Aristóteles.

El objeto de la Lógica Formal es la veracidad del pensamiento, pero reducida a las formas en que un juicio se deduce de otros, aspecto este que es exclusivo de esta ciencia (Kopnin, 1983, pág. 56).

El período de formación de las matemáticas de magnitudes variables y el desarrollo vertiginoso alcanzado por las ciencias, le plantean nuevas exigencias a la Lógica Formal tradicional. El fundador del Materialismo Inglés, Francis Bacon, es el primero en plantear la necesidad imperiosa de crear una nueva lógica que no operara con ideas especulativas, sino con juicios formulados a partir del estudio directo de la naturaleza, es decir, proponía perfeccionar la Lógica Formal a partir del uso del método inductivo como vía del conocimiento.

En lo sucesivo, otros célebres pensadores y seguidores de las ideas de Bacon, aportaron significativamente al desarrollo de la Lógica Formal, entre ellos se destacan: Descartes, Leibniz y Kant.

> "Descartes no niega la lógica formal. La deducción rigurosa ocupa, según él, un lugar fundamental en la consecución de conocimientos en todas las vertientes de la realidad cuando está depurada de las múltiples adherencias escolásticas. Era consciente a la vez de las limitaciones de la Lógica Formal como método y teoría del conocimiento" (Andréiev, 1984, pág. 47).

A diferencia de Bacon, Descartes propone perfeccionar la Lógica Formal mediante el **método matemático deductivo**.

> "En el desarrollo de la lógica formal supuso una importante etapa; **la aparición de una corriente: la lógica matemática**, que se originó, por una parte, como resultado del empleo de nuevos métodos de investigación lógica, y por otra, del estudio de formas de demostración que antes bien no existían en forma desarrollada, bien no eran analizadas en detalles por la lógica" (Kopnin, 1983, pág. 59).

La Lógica Matemática o Lógica Simbólica, también llamada "segunda etapa de desarrollo de la Lógica Formal" se le atribuye, por sus aportes, fundamentalmente a Leibniz, que coincidió en la necesidad de crear una nueva Lógica Formal: la lógica del conocimiento científico, la lógica de los descubrimientos, que debía basarse en el cálculo matemático, en el método de la formalización (Andréiev, 1984, pág. 48). A él se debe, en buena medida, el uso del lenguaje científico de las matemáticas actuales y su implementación en otras ciencias. Por ejemplo, llega a la idea sobre el símbolo "d" (abreviatura de la palabra *differentia*) para la designación de diferencias infinitesimales, conocidas hoy como "*dx*" (diferencial de *x*); representó la integral como suma de “todas” las ordenadas con el símbolo *omny,* que más tarde lo sustituyó por el actual ∫, partiendo de la letra inicial de la palabra *Summa*. Trabajó en el perfeccionamiento de los métodos de cálculo y en su fundamentación, se esforzó por justificar su surgimiento o la deducción rigurosamente lógica.

“El simbolismo y los términos de Leibniz resultaron muy bien pensados, no eran complejos y reflejaban la esencia del asunto, contribuían a la comprensión y permitían operar con ellos según reglas relativamente simples. Muchos de ellos llegaron hasta nuestros días. El valor práctico del cálculo de Leibniz, su sencillez operativa atrajo la atención de los científicos. Rápidamente se convirtió en el centro de todas las matemáticas, en el arma fundamental de investigación en manos de los científicos” (Ríbnikov, 1991, pág. 203).

El progreso de los conocimientos matemáticos y físicos durante el tercer período y la aparición de nuevos métodos de demostración, obliga a la Lógica Formal a estudiarlos, describirlos, e incorporarlos a su arsenal teórico, pero la introducción de procedimientos matemáticos en la lógica no dio origen a una nueva lógica formal ni a una nueva rama de la misma. La lógica Matemática es lógica por su objeto y matemática por su método (Kopnin, 1983, pág. 60).

La Lógica Matemática tiene un contenido puramente matemático e investiga problemas puramente matemáticos, es, al mismo tiempo, concreción de la Lógica Formal, ya que su contenido tiene un valor puramente lógico. A. A. Markov, define a la lógica matemática como: “…una ciencia que estudia las demostraciones matemáticas. La lógica matemática puede considerarse como una rama especial de la lógica general, que se desarrolla con vistas a las necesidades de las matemáticas” (Kopnin, 1983, pág. 61).

Durante el cuarto período de desarrollo de las matemáticas, donde aparecieron y se consolidaron sus distintas ramas, surgió la necesidad de crear un método matemático – lógico que sirviera de fundamento teórico para resolver cualquier problema, esto condujo, a mediados del siglo XIX, a la formalización de la Lógica Matemática como ciencia autónoma. Finalizando el período se comienza toda una revisión crítica de los conceptos primarios (definiciones) y afirmaciones (axiomas) en las matemáticas; se realizaron intentos de construcción de un sistema riguroso de definiciones y demostraciones, así como de los métodos lógicos de las demostraciones matemáticas.

Como consecuencia del desarrollo alcanzado, tanto en las matemáticas como en la Lógica Matemática, hacia finales del siglo XIX, se estableció el método axiomático en la Geometría. En lugar del voluminoso sistema de definiciones, axiomas y postulados planteados por Euclides, se hizo posible introducir sólo un conjunto de axiomas, a partir de los cuales se pueden describir los conceptos fundamentales y propiedades de la teoría. Este método se extendió rápidamente a otras ramas de la Matemática, constituyéndose en uno de los métodos fundamentales de las matemáticas modernas. Según la justa expresión de F. Engels, “…la deducción de las magnitudes matemáticas una de otras, al parecer apriorística, demuestra no su procedencia apriorística, sino sólo su interrelación racional” (Ríbnikov, 1991, pág. 447).

En el período de las matemáticas contemporáneas la Lógica Matemática se desarrolló de forma intensiva a través de los trabajos de G. Boole, el lógico alemán Ernest Schröder, de P. Poretski, de G. Frege, del lógico inglés William Stanley y del lógico estadounidense Charles S. Peirce.

Alrededor de la Lógica Matemática y su objeto de estudio existen diversos criterios:

“es una lógica desarrollada por métodos matemáticos”, lo cual significa también “que estudiar la lógica matemática es estudiar la lógica utilizada en las matemáticas” Stephen Cole Kleene (Guétmanova A., 1991, pág. 204).

“El objeto de la lógica formal estudiado por el método de construcción de lenguajes formalizados se denomina lógica simbólica, o lógica matemática”. Alonso Church (Guétmanova A. , 1991, pág. 204).

"La lógica matemática como parte autónoma de las matemáticas contemporáneas se formó hace relativamente poco, en el empalme de los siglos XIX y XX. Su surgimiento y rápido desarrollo a comienzos del siglo XIX está ligado con la llamada crisis en los fundamentos de las matemáticas" (Guétmanova A. , 1991, pág. 204).

No obstante, en los cursos de Lógica Matemática que se imparten en el nivel superior, su **Objeto de estudio** es el **Pensamiento (matemático)**, forma superior de la actividad psíquica del hombre.

Como se conoce, otras ciencias como la Psicología también tienen como objeto de estudio el pensamiento. **La Psicología** estudia el proceso mismo de pensar, es decir; la estructura de la actividad pensante como forma superior de la actividad humana, aborda el estudio de la formación y el desarrollo de **las operaciones racionales** (análisis, síntesis, la comparación, generalización y abstracción), así como su caracterización según los diferentes niveles de complejidad.

La Lógica Matemática estudia los productos de la actividad pensante, sus resultados, como formas lógicas del pensamiento matemático (**conceptos, juicios y razonamientos**), en particular, las formas en que un juicio se deduce de otros, como en la demostración de un teorema matemático, actividad esencial de esta ciencia, que contribuye al desarrollo de capacidades mentales tales como la argumentación, la inferencia lógica, la refutación de proposiciones falsas, etc.

El **concepto** es la forma principal y más simple de pensamiento. Es una forma de pensamiento mediante la cual el hombre expresa los rasgos generales, esenciales del objeto: "movimiento", "velocidad", "satélite", "hombre", "animal", etc. (Kórshunova, 1986, pág. 167)

Los conceptos pueden ser observados en el aspecto cuantitativo o cualitativo; en este sentido se habla de la extensión del concepto o del contenido del concepto. La extensión designa todos los elementos de la clase observada (cuantitativo), mientras que el contenido se caracteriza por las características comunes (cualitativo). Ambos se delimitan mutuamente, pero constituyen una unidad, puesto que señalando las características se establece la extensión y viceversa. Además, la ampliación de la extensión generalmente ocasiona una disminución del contenido y viceversa (relación inversa entre el contenido y la extensión).

La formación de conceptos matemáticos es una operación lógica que en Matemática juega un papel importante desde los primeros años de la vida del escolar, es una línea directriz de esta asignatura a la que se le presta especial atención, tanto desde el punto de vista lógico – matemático, como didáctico. La elaboración de conceptos se trabaja por vía inductiva o deductiva a partir del contenido y la extensión del mismo.

Los pasos metodológicos que se siguen en la elaboración de conceptos por una u otra vía se incluyen armónicamente en las clases de Matemática a partir de sus funciones didácticas. Sin embargo, el éxito en la formación de conceptos matemáticos no depende solamente del trabajo metodológico, sino, en primera instancia, del conocimiento de los aspectos teóricos relacionados con los mismos, es decir; sus funciones, las características que lo definen, su contenido, el uso de ejemplos y contraejemplos, la variedad de contextos donde se puede utilizar o aplicar y el orden en que estos se deben introducir.

El **juicio** es una conexión de los conceptos en la que uno de ellos se caracteriza a través del otro, una idea gracias a la cual se afirma o se niega algo (Kórshunova, 1986, pág. 171). En el juicio se afirma o se niega algo respecto a los objetos y sus propiedades o las relaciones entre objetos, de donde puede resultar que un juicio sea verdadero o falso (lógica bivalente), como se asume en las proposiciones matemáticas, elemento básico y punto de partida en el estudio de la Lógica Matemática en los textos de Análisis Matemático.

Son ejemplo de juicios en Matemática, las siguientes proposiciones:

- El número 7 es primo. Juicio verdadero.

- 5 es mayor que 10. Juicio falso.
- 2 + 3 = 5. Juicio verdadero.
- Si un triángulo es isósceles, entonces sus ángulos base son iguales. Juicio verdadero (teorema).
- Para dos puntos diferentes P, Q existe exactamente un recta *r* que pasa por los mismos. Juicio verdadero (axioma).

El **razonamiento** es la forma de pensamiento mediante la cual, y a base de ciertas reglas de inferencia de uno o varios juicios verdaderos, se obtiene un nuevo juicio que se infiere de aquellos de modo necesario o con determinado grado de probabilidad. (Guétmanova A. , 1991, pág. 259).

Los razonamientos se dividen en deductivos, inductivos y analogías. El razonamiento deductivo es la conexión entre los juicios; en este, sobre la base de los conocimientos y la experiencia existente, se deduce un nuevo conocimiento. Este tipo particular de razonamiento desempeña una función importante en la demostración de teoremas y propiedades de las matemáticas.

> “la demostración en sí está constituida por una sucesión ordenada de **proposiciones** cada una de las cuales constituye lo que se denomina un **paso** en la demostración. La última proposición de la sucesión es precisamente la proposición que se quiere demostrar. Cada paso, es decir, la inserción de cada proposición en la cadena, debe estar **lógicamente justificado**” (Sánchez Fernández, Análisis Matemático 1, 1985, pág. 27).

Luego, una **demostración matemática** es una sucesión coherente de pasos que, tomando como verdadero un conjunto de premisas (hipótesis), permite obtener la veracidad de una tesis. Estos pasos deben estar fundamentados en la aplicación de reglas de deducción: fundadas ya sea en axiomas o en teoremas anteriormente demostrados o en reglas básicas de deducción del sistema en cuestión.

En resumen, **la demostración**, es el conjunto de métodos lógicos de fundamentación de la veracidad de un **juicio** por medio de otros **juicios verdaderos y relacionados** con él. Su **estructura** es: **tesis** (juicio cuya veracidad debe demostrarse); **argumentos** (los juicios verdaderos que se utilizan para demostrar la tesis); **forma de demostración** (modo de conexión lógica entre la tesis y los argumentos) (Guétmanova A. , 1991, pág. 86).

Veamos el siguiente ejemplo.

Supongamos que sobre el conjunto de los números reales se cumplen, es decir; son juicios verdaderos, las siguientes propiedades o que anteriormente ya han sido demostradas:

P1: si a, b y c son números reales cualesquiera, entonces a + (b + c) = (a + b) + c. Ley asociativa.

P2: si a es un número real cualquiera, entonces a + 0 = 0 + a = a.

P3: Para todo número real a existe un número real -a tal que: a + (- a) = **(-a) + a** = 0.

Demostremos, utilizando P1, P2 y P3, la siguiente propiedad:

“**Si un número real x satisface a + x = a**, entonces **x = 0**”

Notemos primeramente la estructura general de la proposición (juicio).

Si un número real x satisface a + x = a	⇒	x = 0
HIPÓTESIS	Símbolo lógico	TESIS

Demostración directa P implica Q

Pasemos ahora a la demostración utilizando las propiedades (juicios verdaderos) que serán empleadas como argumento durante el razonamiento deductivo que permite obtener la tesis directamente de la hipótesis.

DEMOSTRACIÓN

Hipótesis	$a + x = a$	Argumentos
Aplicando P3	$(-a) + (a + x) = (-a) + a$	Juicio verdadero
Aplicando P2	$(-a) + (a + x) = 0$	Juicio verdadero
Aplicando P1	$((-a) + a) + x = 0$	Juicio verdadero
	$0 + x = 0$	Juicio verdadero
Tesis	$x = 0$	

Entre los argumentos que se utilizan en la demostración están:

1. Hechos singulares certificados, es decir; las estadísticas y los datos científicos, resultados de experimentos e investigaciones.
2. Definiciones de conceptos formuladas en cada ciencia.
3. Los axiomas y postulados, que son los **juicios** aceptados como verdaderos (sin demostraciones) en el marco de una teoría científica, respectivamente.
4. Leyes de la ciencia y teoremas.

Entre los tipos (formas) de demostraciones más utilizados en las matemáticas se encuentran:

1. La demostración directa: la veracidad de la tesis es fundamentada directamente por los argumentos, o sea; de los argumentos dados se infiere la tesis, tal y como se procedió en el ejemplo anterior.
2. Las demostraciones indirectas se caracterizan por la utilización de la negación de la tesis para deducir:
   a) La negación de la premisa del teorema.
   b) La negación de una proposición verdadera de la teoría.
   c) Una proposición y su negación.
   d) Una proposición que contradice a la negación de la tesis.

Entre los métodos indirectos más usados se encuentran: la demostración por contraposición o contrarrecíproco y la demostración por contradicción.

3. La demostración de una equivalencia, donde se debe demostrar la veracidad, tanto de la implicación que se expresa en el teorema, como de su recíproco, es decir; si el teorema tiene la forma de implicación $P \Rightarrow T$ y si $P \Rightarrow T$, es una proposición verdadera, o sea un teorema, entonces su recíproco es la implicación: $T \Rightarrow P$. La equivalencia (también llamada doble implicación) $P \Leftrightarrow T$ se expresa mediante el lenguaje “si y solo si”.
4. La demostración por diferenciación de varios casos, que no es un método de demostración propiamente dicho, sino más bien, un principio para descomponer una demostración en varias partes. Es necesario señalar que en la demostración de cada uno de los casos, se pueden emplear, indistintamente, otros tipos de demostraciones, lo que depende de los argumentos de que se dispongan y la creatividad del que la realice.
5. La demostración de existencia y unicidad. Las demostraciones sobre la existencia de ciertos elementos como determinadas propiedades están, en general, entre las más difíciles de la Matemática, requieren de un trabajo muy creativo para el que es indispensable que el estudiante domine perfectamente el contenido (argumentos). Las demostraciones de unicidad están unidas por lo general a las demostraciones de existencia. Esto puede verse claramente en el gran número de teoremas que contienen en su formulación la frase “…una y solo una…”.
6. La demostración por inducción completa es un método para demostrar proposiciones universales sobre los números naturales que deviene del principio de inducción completa, uno de los axiomas de Peano. Las definiciones inductivas, también llamadas

definiciones por recurrencia, guardan una estrecha relación con este método de demostración.

Es pertinente aclarar, que el método de demostración por inducción completa es deductivo; en este se sugiere una idea o hipótesis general a partir de situaciones particulares, pero la proposición matemática obtenida, se demuestra deductivamente. En la actualidad, la Lógica Matemática tiene muchas vertientes; ante todo, se divide en Lógica Clásica y no Clásica. La primera, incluye fundamentalmente la Lógica Proposicional y la Lógica de los Predicados, que es objeto de estudio de muchos de los Programas de Matemática en el nivel superior, como la primera e indispensable etapa para la construcción de la teoría de conjuntos, que es la base de la de los cardinales y por tanto, de la Aritmética sobre la que reposan el Álgebra, el Análisis y la Geometría.

La Lógica no Clásica comprende actualmente una cadena ramificada de vertientes: Lógica Polivalente, Lógica Constructivista, Lógica Intuicionista, Lógica Positiva, Lógica Modal (incluida la Deóntica), Lógica Paraconsistente, Lógica Relevante, etc. Cada una de estas ramificaciones posee amplia aplicación en la ciencia y la técnica, dentro de las que se destacan, la propia teoría de las matemáticas y la de los ordenadores. Una explicación detallada de cada una aparece en el Diccionario de Lógica: en forma simple sobre lo complejo, en la bibliografía.

La importancia de la Lógica Matemática, puede resumirse en los siguientes aspectos:

- Se ocupa del análisis de las proposiciones y demostraciones.
- Proporciona ideas claras y precisas sobre la naturaleza de la conclusión deductiva.
- Desarrolla el pensamiento funcional.
- Brinda una contribución esencial al desarrollo del pensamiento científico y creador.
- Posibilita la comprensión de las estructuras y las tareas formales, reconocimiento de las semejanzas de los diferentes fenómenos, aplicación de las leyes y reglas lógicas, pretensión de claridad, sencillez y economía en la expresión lingüística.
- Tiene participación en el desarrollo de la humanidad, tanto en el orden filogenético como ontogenético.

Conclusiones

El surgimiento de la Lógica como ciencia no constituye un hecho aislado, está aparejado al de otras ciencias, como el de la Matemática, durante los siglos (siglo VI – V a.n.e.). El hecho de que la Lógica Matemática no aparezca en la historia de esta ciencia como una de sus principales ramas se debe precisamente, a su estrecho vínculo con la Filosofía, en particular, con el desarrollo alcanzado por la Lógica Formal en la época de Bacon, Descartes y Leibniz.

Las relaciones que se establecen entre la Lógica Formal y la Matemática constituyen un ejemplo fehaciente de cómo las ciencias particulares se nutren de la Filosofía y esta a su vez, se enriquece con los avances de aquellas.

El estudio de los conceptos, juicios y razonamientos juega un papel importante no solo en la Lógica Matemática, sino también en la Matemática. Ellos constituyen el fundamento lógico – teórico sobre el que se construyen los contenidos matemáticos esenciales en todos los niveles y tipos de enseñanza, son por tanto, imprescindibles para quienes pretenden enseñar esta ciencia.

La comprensión del papel del conocimiento de la historia de la Matemática y de la Lógica Matemática y sus estrechos vínculos con la Filosofía proveen al maestro de una potente herramienta didáctica para la asimilación y explicación de estas desde una perspectiva dialéctico materialista, cuya base, independientemente de lo abstracto que parezca, está en la actividad práctica de los hombres.

Bibliografía

Andréiev, I. (1984). Problemas Lógicos del conocimiento científico. Moscú: Editorial Progreso.

Aróstegui, J. M. (1975). Metodología del conocimiento científico. La Habana: Editorial de Ciencias Sociales.

Autores, C. d. (1985). Filosofía y Ciencia. La Habana: Editorial de Ciencias Sociales.

Chupajin, I. I. (1964). Problemas de la teoría del concepto. La Habana: Editora Política.

De Galiana Mingot, T. (1968). Pequeño Larousse de Ciencia y Técnica. La Habana: Edición Revolucionaria.

Engels, F. (1979). Anti Duhring. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Guétmanova, A. (1989). Lógica. Moscú: Editorial Progreso.

Guétmanova, A. (1991). Lógica: en forma simple sobre lo complejo. Diccionario. Moscú: Editorial Progreso.

Kopnin, P. V. (1983). Lógica Dialéctica. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Kórshunova, L. y. (1986). ¿Qué es la Filosofía? Moscú: Editorial Progreso.

List, G. (1982). Lógica Matemática, teoría de conjuntos y dominios numéricos. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Muler, H. (1980). Inferencia lógica y demostraciones de la enseñanza de la matemática. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Ríbnikov, K. (1991). Historia de las matemáticas. Moscú: Editorial Mir.

Rosental, M., & Ludin, P. (1954). Diccionario de Filosoifía. La Habana: Editora Política.

Sánchez Fernández, C. (1982). Análisis Matemático I. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Sánchez Fernández, C. (1985). Análisis Matemático 1. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Spivak, M. (1970). Cálculo Infinitesimal. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Warusfel, A. (1972). Diccionario razonado de matemática. Madrid: Editorial Tecno.

Yákovliev, G. N. (1984). Álgebra y principios del Análisis. Parte I . Moscú: Editorial Mir.